Acta Sci. Math., 39 (1977), 175—178

Einfacher Beweis eines Satzes von B. S. Kašin

KÁROLY TANDORI

1. In dieser Note werden wir einen einfachen Beweis für den folgenden Satz von KAŠIN [2] geben:

Satz. *Ist p eine genügend grosse natürliche Zahl, dann gibt es ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{2p^2}(x)$ im Intervall $(0, 1)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$|\varphi_n(x)| = 1 \quad (x \in (0, 1);\ n = 1, \ldots, 2p^2),$$

$$\operatorname{mes}\left\{x \in (0, 1)\colon \max_{1 \leqq k \leqq 2p^2} \left|\sum_{n=1}^{k} \varphi_n(x)\right| \geqq C_1 p \log p\right\} \geqq C_2,$$

wobei C_1, C_2 positive, von p unabhängige Konstanten sind.

(Vorher hat MENCHOFF [3] diese Behauptung für mit einer von p unabhängigen Konstante $M(>1)$ beschränktes System gezeigt.)

2. Zum Beweis benützen wir den folgenden:

Hilfssatz. (S.z.B. [2], [3]) *Es sei $\{g_n(x)\}_1^N$ ein System von Funktionen $g_n(x) \in L^2(0, 1)$, für welche Zahlen γ_i $(i=1, \ldots, N-1)$ existieren, mit*

$$\left|\int_0^1 g_k(x) g_l(x)\, dx\right| \leqq \gamma_i \ (1 \leqq k, l \leqq N,\ |k-l| = i),\ \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i < M.$$

Dann kann man die Funktionen $g_n(x)$ auf das Intervall $[1, 2M+1)$ derart fortsetzen, daß sie dort Treppenfunktionen sind, mit $|g_n(x)| = 1$, und im ganzen Intervall $(0, 2M+1)$ ein orthogonales System bilden.

3. Beweis des Satzes. Wir brauchen die Ideen von [4] und [2]. Wir gehen von einem Funktionensystem von KACZMARZ [1] aus. Es sei

$$f_n(x) = \frac{1}{2(k-p-n-1/2)} \quad \left(x \in \left(\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}\right);\ k = 1, \ldots, 4p;\ n = 1, \ldots, 2p\right),$$

Eingegangen am 1. Dezember 1976.

und wir setzen

$$\alpha_{k,l}=\int_0^4 f_k(x)f_l(x)\,dx.$$

Dann gilt

(1) $$\alpha_{k,k}\leqq C_3/p\quad (k=1,\dots,2p).$$

(Im folgenden bezeichnen $C_3, C_4, \dots$ positive, von p unabhängige Konstanten.) Ferner gilt für $k>l$:

$$\alpha_{k,l}=\frac{1}{4p}\sum_{n=1}^{4p}\frac{1}{(n-p-k-1/2)(n-p-l-1/2)}=$$

$$=\frac{1}{4p(k-l)}\sum_{n=1}^{4p}\left\{\frac{1}{n-p-k-1/2}-\frac{1}{n-p-l-1/2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4p(k-l)}\left\{\sum_{n=1-p-k}^{3p-k}\frac{1}{n-1/2}-\sum_{n=1-p-l}^{3p-l}\frac{1}{n-1/2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4p(k-l)}\left\{\sum_{n=1-p-k}^{-p-l}\frac{1}{n-1/2}-\sum_{n=3p-k+1}^{3p-l}\frac{1}{n-1/2}\right\}.$$

Daraus folgt

(2) $$|\alpha_{k,l}|\leqq\frac{1}{4p(k-l)}\left\{\frac{k-l}{p+l+1/2}+\frac{k-l}{3p-k+1/2}\right\}\leqq\frac{C_4}{p^2}\quad (k,l=1,\dots,2p;\ k\neq l).$$

Weiterhin, auf Grund der Definition ist

(3) $$\max_{1\leqq k\leqq 2p}\sum_{n=1}^{k}f_n(x)\geqq C_5\log p\quad \big(x\in(2,3)\big).$$

Es sei

$$g_{r+(s-1)p}(x)=f_s(x)\quad \big(x\in(0,4);\ r=1,\dots,p;\ s=1,\dots,2p\big).$$

Wir setzen

$$\gamma_i=C_3/p\quad (i=1,\dots,p-1),\quad \gamma_i=C_4/p^2\quad (i=p,\dots,2p^2-1).$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{2p^2-1}\gamma_i=C_3(p-1)/p+C_4(2p^2-p)/p^2\leqq C_6.$$

Auf Grund von (1), (2), und durch Anwendung des Hilfssatzes erhalten wir, daß die Funktionen $g_n(x)$ auf das Intervall $[4, 2C_6+4)$ derart fortgesetzt werden können, daß sie im Intervall $(0, 2C_6+4)$ Treppenfunktionen sind, dort ein orthogonales System bilden, und im ganzen Intervall $(0, 2C_6+4)$ die Ungleichung $|g_n(x)|\leqq 1$ genügen. Dann bilden in $(0, 1)$ die Treppenfunktionen

$$h_n(x)=g_n\big((2C_6+4)x\big)\quad \big(x\in(0,1);\ n=1,\dots,2p^2,\big)$$

ein orthogonales System und aus (3) folgen

(4) $$\operatorname{mes}\left\{x\in(0,1)\colon \max_{1\le k\le 2p^2}\left|\sum_{n=1}^{k} h_n(x)\right| \geqq C_5 p\log p\right\} \geqq C_7,$$

und

(5) $$|h_n(x)| \leqq 1 \quad (x\in(0,1);\ n=1,\dots,2p^2).$$

Es sei $I_1, \dots, I_R$ eine disjunkte Einteilung des Intervalls $(0, 1)$, so daß in jedem Intervall I_r jede Funktion $h_n(x)$ konstant ist. Es sei r $(1\leqq r\leqq R)$ ein fester Index, und wir setzen $I_r=(a_r, b_r)$, $h_n(x)=\varrho_n^{(r)}$ $(x\in I_r;\ n=1, \dots, 2p^2)$. Es seien weiterhin $\chi_n^{(r)}(x)$ $(n=1, \dots, 2p^2)$ stochastisch unabhängige Treppenfunktionen im Intervall $(0, 1)$ mit

$$\int_0^1 \chi_n^{(r)}(x)\,dx = 0 \quad (n=1,\dots,2p^2),$$

wobei $\chi_n^{(r)}(x)$ den Wertbereich $\{1-\varrho_n^{(r)}, -1-\varrho_n^{(r)}\}$ besitzt [1]. Wir setzen

$$\chi_n^{(r)}(I_r;\ x) = \begin{cases} \chi_n^{(r)}\left(\dfrac{x-a_r}{b_r-a_r}\right), & x\in I_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n=1,\dots,2p^2).$$

Es sei endlich

$$\varphi_n(x) = h_n(x) + \sum_{r=1}^{R} \chi_n^{(r)}(I_r;\ x) \quad (n=1,\dots,2p^2).$$

Offensichtlich sind $\varphi_n(x)$ Treppenfunktionen, es gilt $|\varphi_n(x)|=1$ $(x\in(0,1);\ n= =1, \dots, 2p^2)$, weitherhin folgt für $k\neq l$:

$$\int_0^1 \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx = \int_0^1 h_k(x)h_l(x)\,dx + \sum_{r=1}^{R}\int_{I_r} h_k(x)\chi_l^{(r)}(I_r;\ x)\,dx +$$
$$+\sum_{r=1}^{R}\int_{I_r}\chi_k^{(r)}(I_r;\ x)h_l(x)\,dx + \sum_{r=1}^{R}\int_{I_r}\chi_k^{(r)}(I_r;\ x)\chi_l^{(r)}(I_r;\ x)\,dx =$$
$$= \sum_{r=1}^{R}\varrho_k^{(r)}\operatorname{mes}(I_r)\int_0^1\chi_l^{(r)}(x)\,dx + \sum_{r=1}^{R}\varrho_l^{(r)}\operatorname{mes}(I_r)\int_0^1\chi_k^{(r)}(x)\,dx +$$
$$+\sum_{r=1}^{R}\operatorname{mes}(I_r)\int_0^1\chi_k^{(r)}(x)\chi_l^{(r)}(x)\,dx = 0.$$

Also bilden die Funktionen $\varphi_n(x)$ ein orthonormiertes System in $(0, 1)$.

Es sei I_r ein Intervall, für welches

(6) $$\max_{1\le k\le 2p^2}\left|\sum_{n=1}^{k} h_n(x)\right| \geqq C_5 p\log p \quad (x\in I_r)$$

[1] Ist $|\varrho_n^{(r)}|=1$, dann soll man $\chi_n^{(r)}(x)\equiv 0$ setzen.

gilt. Daraus und aus (5), durch Anwendung der Kolmogoroffschen Ungleichung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\left\{x\in I_r\colon \max_{1\le k\le 2p^2}\left|\sum_{n=1}^{k}\chi_n^{(r)}(I_r;\,x)\right| \ge C_5 p\log p/2\right\} \le \\
(7)\qquad &\le 4\sum_{n=1}^{2p^2}\int_{I_r}(\chi_n^{(r)}(I_r;\,x))^2\,dx/C_5^2p^2\log^2 p \le C_8 \operatorname{mes}(I_r)/\log^2 p.
\end{aligned}
$$

Ist p so groß, daß

$$C_8/\log^2 p \le 1/2$$

gilt, so ist

$$\operatorname{mes}\left\{x\in I_r\colon \max_{1\le k\le 2p^2}\left|\sum_{n=1}^{k}\varphi_n(x)\right| \ge C_5 p\log p/2\right\} \ge \operatorname{mes}(I_r)/2,$$

auf Grund von (6) und (7). Daraus und aus (4) erhalten wir

$$\operatorname{mes}\left\{x\in(0,1)\colon \max_{1\le k\le 2p^2}\left|\sum_{n=1}^{k}\varphi_n(x)\right| \ge C_5 p\log p/2\right\} \ge C_7/2.$$

Durch Anwendung dieses Lemmas kann man den Satz von Kašin [2] leicht herleiten.

Schriftenverzeichnis

[1] S. Kaczmarz, Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, **5** (1934), 103—106.

[2] B. S. Kašin, On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series, *Analysis Math.*, **2** (1976), 249—266.

[3] D. E. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil Math. Moscou*, **3** (43) (1938), 103—120.

[4] K. Tandori, Über ein orthonormiertes System von D. E. Menchoff, *Publicationes Math., Debrecen*, **23** (1976), 137—140.

BOLYAI INSTITUT
ARADI VÉRTANÚK TERE 1.
6720 SZEGED, UNGARN